Test pre prijímacie pohovory z matematiky

26.04.2024, 10:00 hod. ***skupina A***

1. **(3b)** Ktoré z nasledovných tvrdení je/sú pravdivé?

a) $-\log_{0.3} 3 > \log_3 0.3$

b) $\log_{0.3} 3 > -\log_3 0.3$

c) $\log_3 3 > \log_{0.3} 0.3$

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: ***a)***

2. **(3b)** Ktoré z nasledovných výrazov sú väčšie ako 1?

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: **b*)***

3. **(5b)** Nájdite definičný obor funkcie f .

$$f:\ y=\frac{x+2}{2-\sqrt{5-x^2}}$$

Riešenie:	$D(f)=\left[-\sqrt{5},-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,\sqrt{5}\right]$

4. **(3b)** Pre aké hodnoty m nasledujúca nerovnosť platí?

$$m^{\frac{2}{5}} < m^{\frac{-2}{5}}$$

Riešenie:	Nerovnosť platí pre: $0<m<1$

5. **(2b)** Pre akú hodnotu parametra $t \in R$ bude bod $A=[-3,7]$ ležať na priamke $p: x=3-2t;\ y=4+t$?

Riešenie:	$t=3$

6. **(5b)** Ktorá z nasledujúcich parabol má vrchol v bode $A=[2,-1]$. Pre túto parabolu nájdite jej priesečníky s osami $\vec{x}$ a $\vec{y}$?

a) $p: y=2x^2+3x-15$

b) $p: y=-x^2-2x+7$

c) $p: y=x^2-4x+3$

Riešenie:	Správna parabola je **c)** Priesečník s osou $\vec{y}$ má súradnice $[0\ ,3]$. Priesečníky s osou $\vec{x}$ majú súradnice $[3\ ,\ 0]$ a $[1\ ,\ 0]$.

7. **(4b)** Určte obor riešiteľnosti na množine $\mathbb{N}$ a na tomto obore riešte rovnicu

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}+\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=19\,.$$

Riešenie:	Podmienka riešiteľnosti $\{n\in\mathbb{N};\ n\geq 3\}$. Riešením rovnice je číslo: $n=5$.

8. **(5b)** Určte obor riešiteľnosti a na tejto množine sčítajte zlomky a zjednodušte výsledný výraz do tvaru jedného zlomku, ktorého čitateľom je číslo.

$$\frac{3-2x}{4+x}+\frac{2+3x}{4-x}+\frac{x\,.\,(5x+3)}{x^2-16}$$

Riešenie:	$OR: x\neq 4,\quad x\neq -4$ ***alebo*** $OR=\mathbb{R}-\{-4,4\}$	Výraz po úprave: $\dfrac{-20}{x^2-16}$

9. **(6b)** Nájdite všetky reálne korene polynómu $2x^3-7x^2-10x+24$, ak viete, že jeden z jeho koreňov je $x=4$.

Riešenie:	Korene polynómu sú: $x=-2,\ x=\dfrac{3}{2},\ x=4$.

10. **(6b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a na tejto množine zjednodušte výraz do tvaru ktorý bude obsahovať maximálne dva znaky (premenná / operátor / číslica).

$$\left(+\frac{2xy}{y^2-x^2}-\frac{y}{y+x}-\frac{x}{y-x}\right)\left(\frac{3y}{y+x}+\frac{6xy}{y^2-x^2}+\frac{3x}{y-x}\right)$$

Riešenie:	$OR: x\neq y, x\neq -y$ ***alebo*** $OR:\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x\neq y, x\neq -y\}$	Výraz po úprave: -3

11. **(7b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a nájdite všetky riešenia nerovnice:

$$\frac{9x+27}{x^2+8x+15}>2$$

Riešenie:	$OR: x \neq -5,\ \ x \neq -3$ ***alebo*** $OR = \mathbb{R} - \{-5,-3\}$	$K = (-5,-3) \cup \left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ ***alebo*** $K = \left(-5,-\frac{1}{2}\right) - \{-3\}$

12. **(7b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a nájdite všetky riešenia rovnice:

$$\frac{2x}{x+3}-\frac{x}{x^2-x-12}+3=\frac{2x-4}{x-4}$$

Riešenie:	$OR: x \neq -3,\ \ x \neq 4$ ***alebo*** $OR = \mathbb{R} - \{-3,4\}$	$K = \left\{6,\ -\frac{4}{3}\right\}$

13. **(5b)** Na množine reálnych čísel nájdite všetky riešenia rovnice:

$$\log_{3x} x^2+7x-12=1$$

Riešenie:	*Pomocný výsledok :* $OR = \left(\frac{-7+\sqrt{97}}{2},\ \infty\right) = (1.424,\infty)$ ***Boduje sa*** $K = \{2\}$

14. **(5b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a nájdite všetky riešenia rovnice:

$$2\cos(x-\pi)=1$$

Riešenie:	$OR = \mathbb{R}$	$K = \left\{x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ ***alebo*** $K = \left\{x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi;\ x=\frac{2}{3}\pi+2\pi(k+1),\ k\in\mathbb{Z}\}\right\}$

15. **(5b)** Ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $f: y = \frac{2-x}{x^2-x-2}$ je/sú nepravdivé? Uveďte všetky (označením písmen a) – e)):

a) definičnou oblasťou je množina $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
b) funkcia nie je zdola ohraničená
c) inverzná funkcia je rastúca na celom definičnom obore
d) je klesajúca na celom definičnom obore
e) oblasťou hodnôt je množina $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: **a), c), d)**

16. **(5b)** Nájdite priesečník/y kružnice danej stredom $S = [3,2]$ s polomerom $r = 2$ a priamkou p danou bodmi $A = [2,-1]$ a $B = [6,3]$. Uveďte rovnicu kružnice v stredovom aj vo všeobecnom tvare a rovnicu priamky vo všeobecnom tvare.

Riešenie:	Kružnica vo všeobecnom tvare $k:\ x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$. Kružnica v stredovom tvare $k:\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Priamka $p:\ -4x + 4y + 12 = 0$ alebo $p:\ -x + y + 3 = 0$ Priesečníky priamky p s kružnicou k sú bod/body $[3,0]$ a $[5,2]$.

17. **(7b)** Riešte systém rovníc na množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} +2x \quad +y \quad +3z &= 1 \\ -x \quad +y \quad -2z &= 3 \\ -2x \quad -2y \quad +z &= -7 \end{aligned}$$

Riešenie:	Riešením systému rovníc je: $K = \{[x,y,z] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ [x,y,z] = [1,2,-1]\}$ **alebo** $K = \{[x,y,z] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x = 1,\ y = 2,\ z = -1\}$

18. **(5b)** Zistite hodnotu prvého člena, diferenciu aritmetickej postupnosti a tiež súčet prvých siedmych členov tejto aritmetickej postupnosti, ak platí:

$$-a_2 + 2a_4 = -11$$
$$3a_1 - a_5 = 20$$

Riešenie:	Prvý člen $a_1 = 4$ Diferencia $d = -3$ Súčet prvých siedmych členov $\sum_{i=1}^{7} a_i = -35$.

19. **(5b)** Vo výrokovej logike., ak použijete predikáty: Cx - x je človek Vx - x je vec, D - človek daruje človeku vec, $\exists$ - existuje, $\forall$ každý/všetko, nájdite správny preklad výroku: $(\exists xyz)((C(x) \wedge C(y) \wedge V(z)) \wedge \neg D(xyz)$

a) Niekto dal niekomu niečo
b) Niekto nedal niekmu niečo
c) Každý dal niekomu niečo
d) Niekto dal každému niečo

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: ***b***

20. **(7b)** Napíšte negáciu nasledujúceho zloženého výroku použitím pravidiel pre negácie elementárnych výrokov tak, aby výsledok obsahoval len A, B, C a operátory $\wedge$, $\vee$, $\neg$

$$\neg(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \vee C)$$

Zistite pravdivostnú hodnotu negácie výroku, ak výroky A a B sú nepravdivé a výrok C je pravdivý.

Riešenie:	Negácia zloženého výroku má tvar: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$ *Akceptované sú aj iné logicky správne vyjadrenia negácie* Pravdivostná hodnota negácie ak A a B sú nepravdivé a výrok C je pravdivý je: ***nepravda***